Variedades Algébricas (Afins):

Def: Seja k um corpo. Uma variedade (algébrica afim) é um conjunto $X \subset k^n$ (para algum n) da forma

$$X = V(I) := \{ \underline{a} \in k^n \mid f(\underline{a}) = 0 \ \forall f \in I \}$$

onde $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ é um ideal.

NB: $k[X_1, \ldots, X_n]$ Noetheriano

$$\Rightarrow V(I) = V(f_1, \ldots, f_r)$$

para algum $f_1, \ldots, f_r \in I$ (basta escolher f_i geradores para I).

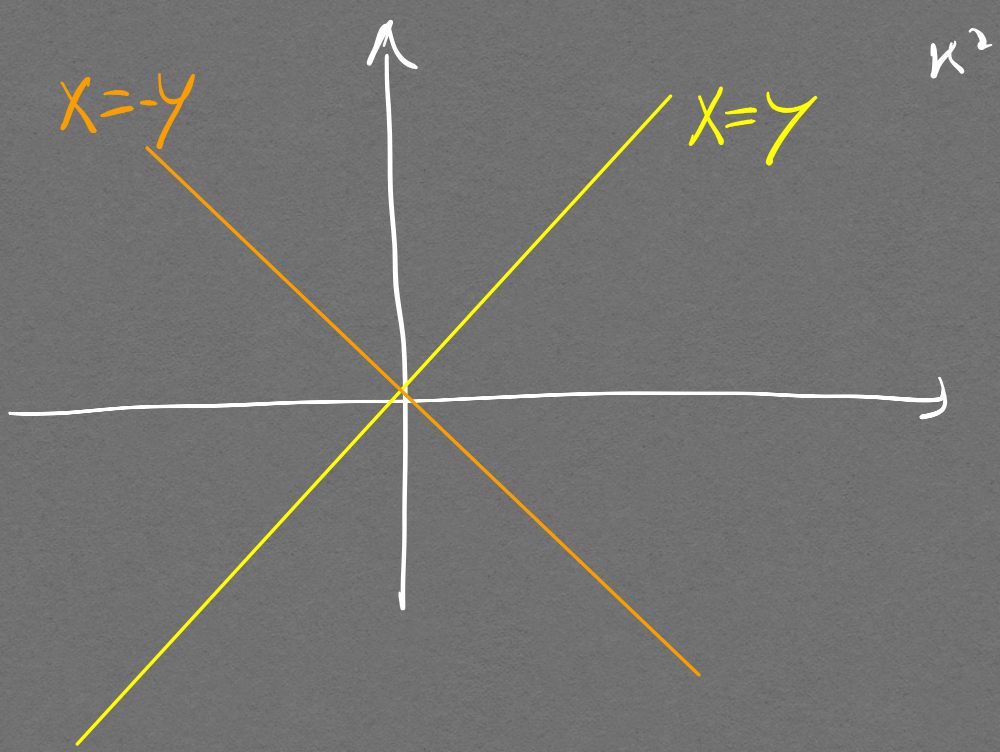
Exemplos: 1. $\emptyset = V(k[x_1, \ldots, x_n])$

$k^n = V(\langle 0 \rangle)$

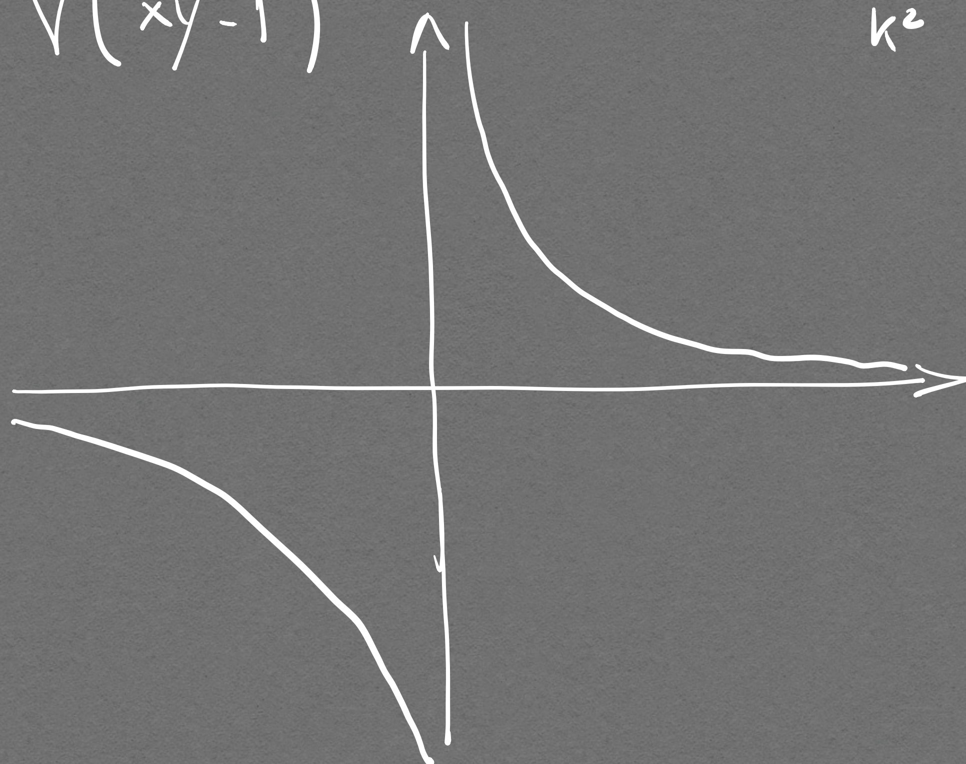
2. $V(x^2 - y^2) \subset k^2$

Temos $x^2 - y^2 = 0 \iff x = \pm y$, logo

$$V(x^2 - y^2) = V(x-y) \cup V(x+y)$$



3. $V(xy-1)$



4. Se $f \in k[x_1,\dots,x_n]$ podemos definir a variedade $V(yf-1) \subset k^{n+1}$

$$\cap$$

$$k[x_1,\dots,x_n,y]$$

cujo conj. dos pontos está em bijeção com

$$k^n - V(f)$$

Notação: Se $X \subset \mathbb{k}^n$ é variedade algébrica tb dizemos que X é subvariedade de $\mathbb{k}^n$.

Dado $I \subset \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]$ consideremos a $\mathbb{k}$-álgebra f.g. $R := \mathbb{k}[X_1, \dots, X_n]/I$

Se $\mathbb{k}$ é algebricamente fechado os ideais maximais de R são da forma

$$\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$$

onde x_i é a imagem de X_i em R e tq $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$.

Obtemos assim uma bijecção:

$$V(I) \longleftrightarrow \operatorname{Spec}_m R = \operatorname{Spec}_m k[X_1,\dots,X_n]/I$$

$$\underset{\underline{a}}{\psi} \longleftrightarrow m = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$$

<u>NB</u>: A correspondência $I \longmapsto V(I)$ é entre ideais de $k[X_1,\dots,X_n]$ e subvariedades afins de k^n

$$k[X_1,\dots,X_n] \supset I \longmapsto V(I) \subset k^n$$

Em sentido inverso, existe uma correspondência

$$\{X \mid X \subset k^n\} \xrightarrow{\ I\ } \{J \subset k[X_1,\dots,X_n] \mid J \text{ ideal}\}$$

$$I(X) := \{f \in k[X_1,\dots,X_n] \mid f(\underline{a}) = 0 \ \forall \underline{a} \in X\}$$

Temos $I(X) = \bigcap_{\underline{a} \in X} m_{\underline{a}}$

onde $m_{\underline{a}}$ é o ideal maximo $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$

<u>NB</u>: V e I invertem inclusões

$$I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$$
$$X \subset Y \Rightarrow I(X) \supset I(Y)$$

<u>NB</u>: 1. $V(I) = V(\sqrt{I})$

2. $V\left(\sum_i I_i\right) = \bigcap_i V(I_i)$

3. $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$

$= V(I \cap J)$

pois $IJ \subset I \cap J$

$\Rightarrow V(IJ) \supset V(I \cap J)$

e $I \cap J \subset \sqrt{IJ}$

$\Rightarrow V(I \cap J) \supset V(\sqrt{IJ}) = V(IJ)$

<u>Teorema (Nullstellensatz)</u>: Se k é algebrica/ fechado, temos

(a) $J \subsetneq k[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow V(J) \neq \emptyset$

(b) $I(V(J)) = \sqrt{J}$

<u>Dem</u>: (b)

$$I(V(J)) = \bigcap_{\substack{m \text{ ideal maximal} \\ m \supset J}} m = \sqrt{J}$$

Nullstellensatz versão algébrica.

(a) Seja $J \subsetneq k[X_1, \dots, X_n]$. Por (b)

$$I(V(J)) = \sqrt{J} \neq \underbrace{I(\emptyset)}_{= k[X_1, \dots, X_n]}$$

logo $V(J) = \emptyset$

(pois J próprio $\Leftrightarrow$ $\sqrt{J}$ próprio) $\boxtimes$

<u>Questão</u>: $V(I(X)) = ?$

<u>Def</u>: Uma variedade afim $X \subset k^n$ diz-se <u>irredutível</u> se

$$X = X_1 \cup X_2 \text{ e } X_1, X_2 \text{ variedades}$$
$$\Rightarrow X = X_1 \text{ ou } X = X_2$$

<u>Exemplos</u>: 1. $X = k^n$ é irredutível

$$k^n = V(\langle 0 \rangle) = V(I) \cup V(J)$$
$$= V(IJ)$$

$$\Rightarrow \langle 0 \rangle = \sqrt{\langle 0 \rangle} = \sqrt{IJ}$$

$$\Rightarrow I = \langle 0 \rangle \text{ ou } J = \langle 0 \rangle$$

2. $f \in k[X_1, ..., X_n]$ irredutível (primo)

$$\Rightarrow V(f) := V(\langle f \rangle) \text{ é irredutível:}$$

Se $V(f) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$

$$\Rightarrow \langle f \rangle = \sqrt{\langle f \rangle} = \sqrt{IJ}$$

$$\Rightarrow IJ \subset \langle f \rangle$$

$$\Rightarrow I \subset \langle f \rangle \text{ ou } J \subset \langle f \rangle$$

$\langle f \rangle$ é primo

$$\therefore \quad V(f) = V(I) \text{ ou } V(f) = V(J).$$

Prop: Um variedade $X \subset K^n$ é irredutível sse $I(X)$ é primo.

Dem: 1. Suponhemos X irredutível e $fg \in I(X)$

$$\Rightarrow V(fg) \supset V(I(X))$$

$$\Leftrightarrow V(f) \cup V(g) \supset V(I(X)) \supset X$$

$$\Rightarrow X \subset V(f) \text{ ou } X \subset V(g)$$

X irredutível

$$\therefore f \in I(X) \text{ ou } g \in I(X)$$

$$\therefore I(X) \text{ é primo.}$$

2. Suponhamos que $I(X) = \mathfrak{p}$ é primo

Temos

$$X = V(\mathfrak{p}) = V(I(X))$$

pq X é variedade (exercício)

Se $X = V(I) \cup V(J)$, vem

$$V(\mathfrak{p}) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$$

$$\Rightarrow IJ \subset \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$$

$$\Rightarrow I \subset \mathfrak{p} \text{ ou } J \subset \mathfrak{p}$$

$\mathfrak{p}$ primo

$\therefore X = V(I)$ ou $X = V(J)$

$\therefore X$ irredutível.

$\blacksquare$

<u>Cor</u>: Se k é um corpo algebricamente fechado, então V e I induzem bijeções

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{c}\text{ideais radicais}\\ \text{de } k[X_1,\dots,X_n]\end{array}\right\} & \underset{I}{\overset{V}{\longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{c}\text{subvariedades}\\ \text{algébricas}\\ \text{de}\\ k^n\end{array}\right\} \\
\cup & & \\
\operatorname{Spec} k[X_1,\dots,X_n] & \underset{I}{\overset{V}{\longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{c}\text{subvariedades}\\ \text{irredutíveis de}\\ k^n\end{array}\right\} \\
\cup & & \cup \\
\operatorname{Spec}_m k[X_1,\dots,X_n] & \underset{I}{\overset{V}{\longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{c}\text{pontos de}\\ k^n\end{array}\right\}
\end{array}$$

__Cor__: Nas mesmas cond, se $J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é um ideal e se $R := k[x_1, \dots, x_n]/J$, temos bijeções

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} R & \underset{I}{\overset{V}{\longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{l} \text{subvariedades irredutíveis} \\ \text{de } X = V(J) \end{array} \right\} \\
\cup & & \cup \\
\operatorname{Spec}_m R & \underset{I}{\overset{V}{\longleftrightarrow}} & \{ \text{pontos de } X \}
\end{array}$$

__Def__: A __topologia de Zariski__ em k^n é aquela cujos fechados são as subvariedades algébricas de k^n, ou seja, os fechados são da forma

$$V(I) \subset k^n \quad \text{t.q. } I \subset k[x_1, \dots, x_n] \text{ é ideal}$$

NB:

$$V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}$$

exercício

logo $V(\mathcal{I}(X)) = X$ se X é variedade.

Def: Se $X = V(J) \subset k^n$ é uma variedade afim, a top. de Zariski em X é a top. induzida da top. de Zariski em k^n. Ou seja os fechados são da forma

$$V(J)$$

t.q. $V(J) \subset V(I)$. $(\Leftrightarrow I \subset \sqrt{J})$

Propriedade Noetheriana da Topologia de Zariski em k^n:

Prop.: (i) Toda a cadeia decrescente de subvariedades de k^n:

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_r \supset \cdots$$

estabiliza, i.e., $\exists N : V_i = V_N \ \forall i \geq N$

(ii) Todo o conjunto $\neq \emptyset$ de subvariedades de k^n tem elemento minimal.

Dem: 1. $k[X_1, \ldots, X_n]$ é Noetheriano

2. $\mathcal{I}(V_i) = \mathcal{I}(V_N) \Rightarrow V_i = V_N$

3. $I(V) \supset I(V_i) \Rightarrow V \subset V_i$ $\boxed{\Sigma}$

<u>Teorema</u>: Se $X \subset k^n$ é uma variedade, então existem variedade irredutíveis $X_1, \dots, X_r \subset k^n$ t.q.

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r \quad (*)$$

e $X_i \not\subset X_j$ se $i \neq j$.

<u>Dem</u>: Demonstremos o resultado por contradição. Seja S o conj. das subvariedades de k^n que não possuem uma decomposição como $(*)$

Se $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{X \in S}$: X é minimal

Temos

1. X não irredutível: $X = X_1 \cup X_2$ com X_1, X_2 variedades t.q. $X \not\subset X_i$ $i = 1, 2$.

2. Por minimalidade de X, X_1, X_2 têm decomposição como $(*)$

$$X_i = X_1^i \cup \dots \cup X_{r_i}^i \quad i = 1,2$$

3. Temos

$$(**) \quad X = X_1^1 \cup \dots \cup X_{r_1}^1 \cup X_1^2 \cup \dots \cup X_{r_2}^2$$

Eliminando os termos supérfulos em $(**)$ obtemos uma decomposição como em $(*)$

$\therefore\ S = \emptyset.$

$\square$

<u>Cor</u>: Se $J \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ um ideal radical em $\exists\, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ tq.

$$J = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$$

<u>Dem</u>: Seja $X := V(J) \underset{J \text{ radical}}{\Longrightarrow} J = I(X)$

Sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]$ tq.

$$\begin{aligned} X &= V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r) \\ &= V(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{r} P_i}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{r} P_i$$

$\hookrightarrow P_i$ primos

$\boxtimes$

Spec R com R Noetheriano:

Temos uma correspondência

$$\mathfrak{a} \longmapsto V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} R$$

entre ideais de R e subconjuntos fechados de $\operatorname{Spec} R$:

- $V\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i)$
- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$
- $V(R) = \emptyset$ e $V(\langle 0 \rangle) = \operatorname{Spec} R$

Temos tb $\operatorname{Spec} R \supset X \longmapsto I(X) : \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p} \subset R$

corresp. de subconj. de $\operatorname{Spec} R$ para ideais de R. Temos

$$I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

$$= \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

<u>Prop</u>: Se R é Noetheriano, $\operatorname{Spec} R$ é um esp. topológico Noetheriano, ou seja, toda a cadeia decrescente de fechados estabiliza.

<u>Cor</u>: Se $X \subset \operatorname{Spec} R$ é fechado, então

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r$$

onde $X_1, \dots, X_r$ são fechados e $i \neq j \Rightarrow$

$$X_i \not\subset X_j.$$